

# ESTUDIO COMPARATIVO DE VENTANAS CLÁSICAS VS NOVEDOSAS FUNCIONES DE VENTANAS BASADAS EN LA TEORÍA DE FUNCIONES ATÓMICAS EN EL DISEÑO DE FILTROS FIR

Escamilla-Hernández E<sup>a</sup>., García-Rios E<sup>a</sup>., Reyes-Alonso G<sup>a</sup>., Melchor-Chávez P<sup>a</sup>., Ramírez-Miller E. G<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Instituto Tecnológico Superior del Occidente del Estado de Hidalgo, Paseo del agrarismo 2000, Carr. Mixquiahuala-Tula Km. 2.5, Mixquiahuala de Juárez, Hidalgo, México, 42700.

Recibido 03 de noviembre de 2017; aceptado 08 de febrero de 2018

---

*Palabras clave:*

*Banda de paso, Filtro de respuesta al impulso finito, Lóbulos laterales*

**RESUMEN.** El presente trabajo presenta un análisis de diferentes familias de novedosas funciones de ventana basadas en la teoría de Funciones Atómicas (AF), en el diseño de filtros FIR usando el método de ventaneo, así como resultados de cada una de estas familias; si bien este método se caracteriza por presentar una respuesta en fase lineal los resultados muestran que las ventanas clásicas no presentan una respuesta en fase lineal después de la banda de corte. Estas novedosas funciones de ventana presentan respuestas muy similares en la banda de paso comparadas con ventanas clásicas como: rectangular, Hamming, Gauss; pero en la banda de rechazo la atenuación es superior que las ventanas clásicas presentando un mayor decrecimiento de los lóbulos laterales conforme se alejan de la frecuencia de corte y presentan una mejoría en la respuesta en fase de manera lineal en todo el espectro de frecuencia. Se analizan los parámetros más importantes que deben de cumplir las funciones de ventana en las diferentes aplicaciones de la ingeniería tales como: Respuesta en Magnitud y fase, Ganancia, Máxima Amplitud de Lóbulos Laterales, Decrecimiento de Lóbulos Laterales. La comparación se realiza con ventanas clásicas versus funciones de ventanas en base la teoría de AF; las ventanas AF utilizadas son  $gk(x)$  ( $k > 1$ ).

---

*Key words:*

*Band Pass, Filter Finite Impulse Response, Windowing*

**ABSTRACT.** This paper presents an analysis of different families of novel window functions based on the theory of Atomic Functions (AF), on the design of FIR filters using the windowing method, as well as results of each of these families; although this method is characterized by presenting a response in linear phase the results show the classical windows do not present a linear phase response after the cut-off frequency. These novel windows present a similar responses in the pass band compared with classic windows such as: Square, Hamming, Gauss; but in the stop band the attenuation is higher than the classical windows showing a greater decrease of the latent cells as we move away from the cut-off frequency and there is an improvement in the response in the phase in a linear manner throughout the frequency spectrum. Some important parameters that windows must fulfill for different applications of engineering are calculated: Magnitude and phase response, Gain, Maximum Amplitude of Side Lobes, Decrease of Side Lobes. The comparison is made with classical windows versus window functions based on the theory of AF; the windows AF presented are  $gk(x)$  ( $k > 1$ ).

---

## INTRODUCCIÓN

Un filtro digital se puede definir como un proceso por medio del cual una secuencia de números, representativa de una señal de entrada, es convertida en otra secuencia, representativa a la salida, y en tal conversión cambia las características de la secuencia basándose solamente en la combinación lineal de las entradas actuales y anteriores.

Los filtros de respuesta finita al impulso (cuya traducción al inglés se abrevia con las siglas FIR,

Finite Impulse Response) tienen la ventaja de poder ser puestos en práctica con facilidad además de poseer la propiedad de presentar un retardo de fase lineal para una respuesta al impulso par o impar. Como tal propiedad es de suma importancia en la práctica, las técnicas de diseño de filtros FIR son presentando un gran interés en el área de procesamiento digital de señales. Hay cuatro técnicas importantes en el diseño de filtros FIR que a continuación se enumeran: (1) la técnica de función ventana; (2) la técnica de muestreo en frecuencia; (3)

la técnica de diseños con rizado uniforme y, (4) la técnica del diseño máximamente plano. En el presente trabajo abordaremos la técnica de diseño en base a funciones de ventana.

En el diseño de filtros FIR usando la técnica de función de ventana se basa en el que la salida tendrá un número finito de términos no nulos, si la entrada es una señal impulso; en comparación con la respuesta al impulso del filtro ideal. Esta limitación en el número de términos (truncamiento) se manifiesta en la respuesta en frecuencia del filtro FIR, como un fenómeno de Gibbs<sup>1,2</sup>, el cual produce ondulaciones antes y después de cualquier discontinuidad. Es por ello que se realiza comúnmente en toda aplicación de filtros FIR, el enventanado a través de un número finito de secuencias de funciones de ventana<sup>2,3</sup>.

Se usan funciones de ventana en análisis armónico para reducir los efectos indeseables relacionados con la pérdida espectral. Estas ventanas impactan en muchos aspectos de los procesos armónicos; estos incluyen resolución, intervalo dinámico, esperanza, facilidad de realización, atenuación de lóbulos laterales, ancho de banda a -3dB, factor de ganancia, razón de decaimiento de lóbulos laterales.

Varios estudios se han hecho sobre estas funciones de ventana<sup>4-7</sup>; por conveniencia, estas funciones de ventana se especifican en tiempo discreto, el espectro de estas ventanas incluye un lóbulo principal y varios lóbulos laterales por lo que es deseable que la ventana satisfaga las siguientes condiciones:

- Un lóbulo principal tan angosto como sea posible, y
- Un nivel máximo en los lóbulos laterales tan pequeño como sea posible.

Existen en la literatura diferentes estudios sobre ventanas, las ventanas clásicas usadas en literatura son Hamming, Hanning, Blackman-Harris, Kaiser-Kaiser-Bessel, Dolph-Chebyshev, Gauss, etc. Cada una de estas presentando ventajas y desventajas mientras que en señales unidimensionales la venta a de Hamming es la más utilizada por ejemplo en la extracción de los coeficientes MFCC, filtrado de voz, etc.

Mientras que la ventana de Gauss es muy usada en señales bidimensionales tal es el caso de la transformada de Gabor que hace uso de esta función

de Gauss para poder llevar a cabo las rotaciones y extracción de características, detección de bordes propuesto por Harris, etc.

En este trabajo se realiza una comparación entre ventanas clásicas y novedosas funciones de ventanas basadas en teoría de funciones atómicas (AF's)<sup>6,7</sup>, creadas por V. F. Kravchenko.

En la sección II se presenta la técnica de diseño de filtro FIR en base a la técnica de funciones de ventana; Novedosas funciones de ventana son presentadas en la sección III, Los resultados en el diseño de filtros FIR en base a estas novedosas funciones de ventana se muestran y analizan en sección IV; finalmente las conclusiones son presentadas en sección V.

## DISEÑO DE FILTROS USANDO LA TÉCNICA DE VENTANEO.

El método de diseño de filtros 1-D no recursivos por el método de ventana implica la obtención de la respuesta al impulso del filtro, designada como  $h(nT)$ , mediante la aplicación de la serie de Fourier a una respuesta de frecuencia periódica idealizada, y multiplicando la respuesta de impulso por una función de ventana  $w(nT)$  para obtener una respuesta de impulso modificado como<sup>1,2,7</sup>

$$h_w(nT) = h(nT)w(nT) \quad (1)$$

La función ventana  $w(nT)$  es una función par de  $nT$  y de duración finita de tal manera que:

$$w(nT) = 0 \text{ para } |n| > (N-1)/2 \text{ y } w(nT) = w(-nT) \quad (2)$$

Donde N es impar. Por lo tanto, la función de transferencia es de orden finita dada por

$$H_w(z) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} w(nT)h(nT)z^{-n} \quad (3)$$

Si  $h(nT)$  es una función par con respecto a  $nT$ , entonces  $w(nT)h(nT)$  es también una función par con respecto a  $nT$  y, por lo tanto, el filtro obtenido

tiene una respuesta de fase cero. La ec. 3 presenta la ecuación de diferencias a ser realizada en el dominio del tiempo que no es más que una multiplicación de pesos de la ventana por la ventana impulso y de esta forma encontramos los coeficientes del filtro FIR que serán utilizados.

Mediante la aplicación de la convolución compleja unidimensional, la respuesta en frecuencia del filtro modificado se puede expresar como:

$$H_w(e^{j\omega T}) = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} H(e^{j\Omega T}) W(e^{j\Omega T}) d\Omega \quad (4)$$

A continuación, se muestran las expresiones para algunas funciones de ventana clásicas (Tabla 1).

**Tabla 1.** Expresiones para funciones de ventana clásicas.

Ventana	Expresión
Rectangular	$w(n) = 1$
Hamming	$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{n}{N-1}\right)$
Gauss	$w(n) = \exp\left(-(\alpha n T)^2 / 2\right)$

Las ventanas clásicas y un estudio detallado es analizado <sup>4, 5</sup>, donde se muestran los parámetros importantes de estas ventanas en el procesamiento digital de señales y la importancia en la atenuación de los lóbulos laterales con el fin de mejorar el análisis de las señales.

## FUNCIONES DE VENTANAS USANDO FUNCIONES ATÓMICAS

Un reciente tema de investigación son las AF's las cuales comenzaron a ser estudiadas en 1971. Dicho término fue introducido en 1975 por V.L. and V.A. Rvachev. Estas funciones presentan un mejor desempeño en el análisis armónico de señales unidimensionales <sup>7-15</sup>.

Algunas de las ventajas de estas funciones sobre los polinomios trigonométricos algebraicos clásicos es que éstos solo satisfacen ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes, y las funciones atómicas satisfacen una forma más general de estas ecuaciones diferenciales <sup>8-12</sup>.

La AF más simple y más importante se genera por medio de la convolución infinita de impulsos rectangulares. La primera vez que este problema fue indicado en 1967 por V.L. Rvachev y su solución (ec. 5), fue denotada por la función  $up(x)$ , la cual tiene la siguiente representación en base a su transformada de Fourier:

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u \cdot 2^{-k})}{u \cdot 2^{-k}} du \quad [-1, 1] \quad (5)$$

La convolución de las funciones  $\theta_n(x)$  y  $up(x)$  nos producen otra función importante determinada en el intervalo  $\left[-(N+2)/2, (N+2)/2\right]$ , la cual es denotada por  $fup_N(x)$ :

$$Fup_N(x) = \frac{1}{2\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\right)^N \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u \cdot 2^{-k})}{u \cdot 2^{-k}} du \quad (6)$$

Estas funciones  $fup_N(x)$  son positivas y pares para toda  $N$  en el intervalo  $\left[-(N+2)/2, (N+2)/2\right]$

Figura 1 y 2 muestran las funciones de ventana y su respectivo espectro de las funciones de ventana, una característica importante de esta familia es que conforme aumentamos el valor de  $N$  la ventana se hace más angosta y el ancho del lóbulo principal aumenta, pero aumenta la atenuación en los lóbulos laterales, que dependerá de la aplicación que es lo que se desea obtener.

La siguiente familia de AF's a considerar es  $g_k(x)$  la cual está definida en el intervalo  $[-1, 1]$ , en (ec. 7) muestra las expresiones para generar esta familia de funciones ventana.

$$g_k(x) = \frac{1}{2\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{k^2}{1-\cos(2k/3)} \left[ \cos(2u3^{-j}) - \cos(2k/3) \right]}{k^2 - u^2 9^{(1-j)}} e^{-iux} du \quad (7)$$

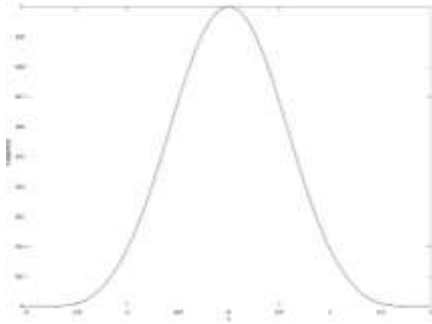


Figura 1a. Ventana  $Fup_2(x)$

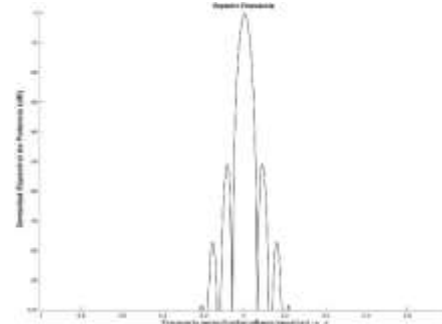


Figura 1b. Espectro Ventana  $Fup_2(x)$

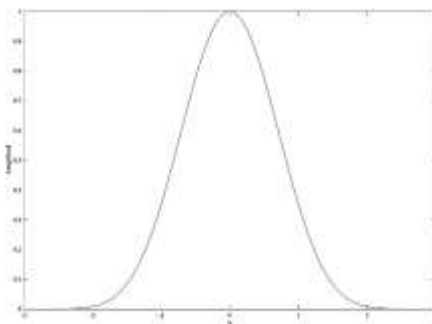


Figura 2a. Ventana  $Fup_4(x)$

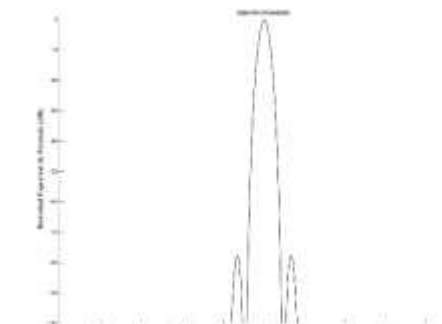


Figura 2b. Espectro Ventana  $Fup_4(x)$

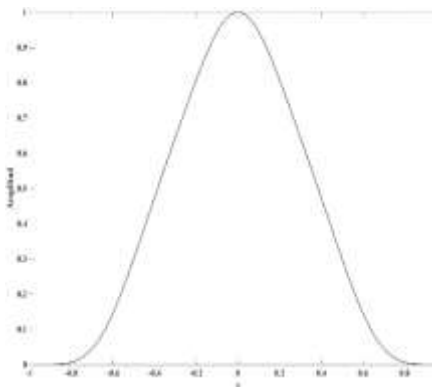


Figura 3a. Ventana  $k = 1$

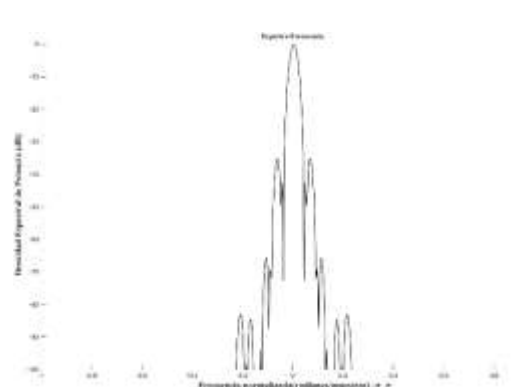


Figura 3b. Espectro de Ventana  $k = 1$

Otra familia de funciones atómicas definida por  $\Xi_n(x)$ , en el intervalo  $[-1, 1]$ , estas funciones son una generalización de la función  $up(x)$ . La representación de estas funciones en base a la Transformada de Fourier es:

$$X_n(x) = \frac{1}{2\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin u(n+1)^{-k}}{u(n+1)^{-k}} \right)^n du \quad (8)$$

Figuras 5 y 6 muestran la funciones de ventana y su respectivo espectro de las funciones de ventana, una característica importante de esta familia es que conforme aumentamos el valor de  $n$  la ventana se hace más angosta y el ancho del lóbulo principal aumenta, pero aumenta la atenuación en los lóbulos laterales, que dependerá de la aplicación que es lo que se desea obtener.

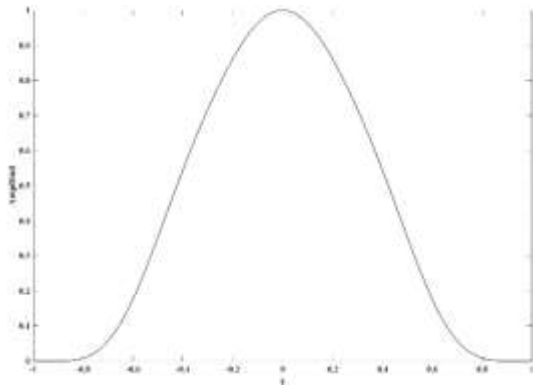


Figura 4a. Ventana  $k = 2$

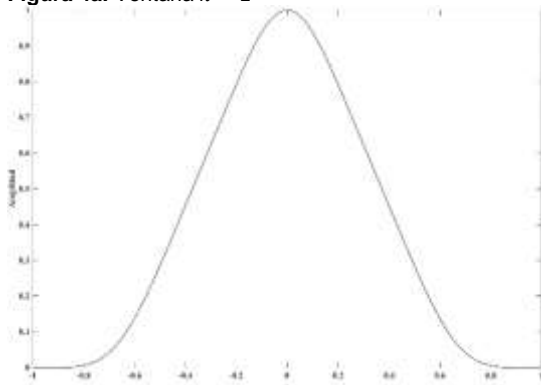


Figura 5a. Ventana  $n = 2$

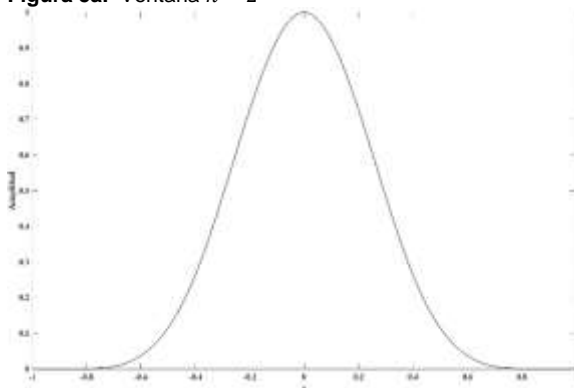


Figura 6a. Ventana  $n = 4$

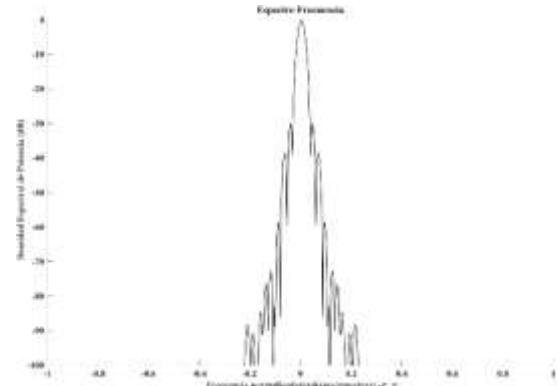


Figura 4b. Espectro Frecuencia  $k = 2$

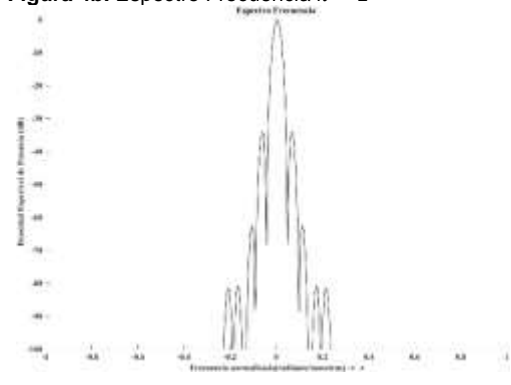


Figura 5b. Espectro de Ventana  $n = 2$

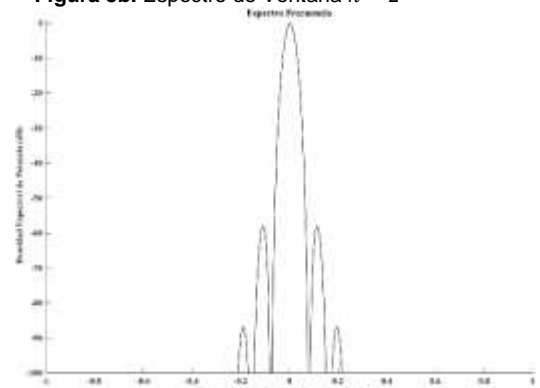


Figura 6b. Espectro Frecuencia  $n = 4$

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente trabajo se realizan el estudio de las funciones  $Fup_N(x)$ , para  $m = 2, 3, 4, 5, 6$ ;  $g_k(x)$ , para  $k = 1, 2$ , en las ec. 9 y 10 se representan las aproximaciones utilizadas para obtener estas novedosas funciones de ventana, la cual se basan en el producto de 150 términos y el intervalo de

integración  $[-500, 500]$ , el tamaño de la ventana es de 100.

$$Fup_N(x) = \frac{1}{2\rho} \int_{-100}^{100} e^{jux} \left( \frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^N \prod_{k=1}^{100} \frac{\sin(u \cdot 2^{-k})}{u \cdot 2^{-k}} du \quad (9)$$

$$g_k(x) = \frac{1}{2\rho} \int_{-100}^{100} \prod_{j=1}^{100} \frac{k^2}{1 - \cos(2k/3)} \frac{[\cos(2u3^{-j}) - \cos(2k/3)]}{k^2 - u^2 9^{(1-j)}} e^{-iux} du \quad (10)$$

A continuación, se presentan algunos parámetros importantes de las funciones de ventana

**Amplificación Coherente:** Este parámetro indica el factor de ganancia de DC de la señal. Para la ventana rectangular este factor es de uno. Para otra ventana, esta ganancia es menor debido a que la ventana tiende a cero cerca de los extremos. La forma de calcular este parámetro se presenta mediante (11);

$$b_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 w(x) dx \quad (11)$$

**Amplitud máxima de los lóbulos laterales:** Un parámetro importante es el nivel máximo de los lóbulos laterales de la ventana en decibelios el cual se toma del máximo de los lóbulos laterales de la ventana. Se obtiene utilizando la ecuación.

$$b_2 = \max_k 10 \log \left| \frac{W(u_k)}{W(0)} \right|^2 \quad (12)$$

**Razón de decrecimiento asintótico de lóbulos laterales:** La razón de decrecimiento de los lóbulos laterales nos representa cómo la amplitud de los lóbulos laterales decrece conforme nos alejamos del lóbulo principal, y son calculados utilizando la ecuación (13).

$$b_3 = \lim_{u \rightarrow \infty} 10 \log \left| \frac{W(2u)}{W(u)} \right|^2 \quad (13)$$

En tabla 2 se muestran los parámetros obtenidos de cada ventana, dicha tabla muestra que la atenuación de estas novedosas funciones de ventana tienen un decaimiento decreciente muy superior a las ventanas clásicas, teniendo como desventaja que la amplitud

máxima de los lóbulos laterales es menor que la ventana de Hamming, con respecto a la ganancia la familia  $g_k(x)$  presentan una mayor ganancia que la ventana de Hamming, mientras que la familia  $Fup_N(x)$  presenta una ganancia de menor a Hamming.

**Tabla 2.** Parámetros de ventanas analizadas

Ventana	$b_1$	$b_2$	$b_3$
Rectangular	1	-13.98	-6
Hamming	0.54	-43.24	-6
$up(x)$	0.5	-23.9	-∞
$X_2(x)$	0.37	-34.43	-∞
$X_3(x)$	0.34	-45.86	-∞
$X_4(x)$	0.30	-57.97	-∞
$X_5(x)$	0.26	-83.41	-∞
$Fup_1$	0.38	-37.38	-∞
$Fup_2$	0.34	-50.78	-∞
$Fup_3$	0.31	-64.37	-∞
$Fup_6$	0.24	-104.31	-∞
$g_{0.5}(x)$	0.38	-34.65	-∞
$g_1(x)$	0.38	-35.33	-∞
$g_2(x)$	0.41	-30.12	-∞

Para el diseño del filtro FIR se realiza con una frecuencia de muestreo de 16KHz, frecuencia de corte normalizada de 0.5 y 0.25, con orden filtro de 100; ganancias y frecuencias normalizadas.

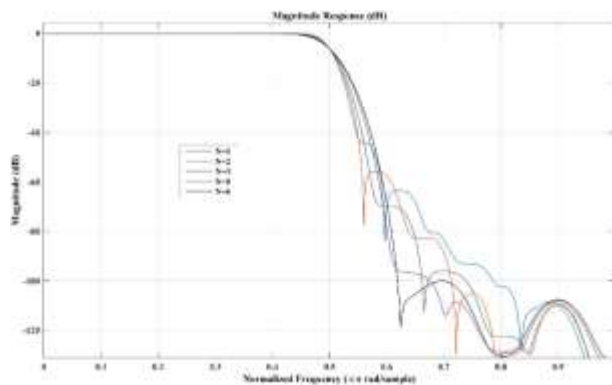
De figura 7 se muestra que los mejores resultados son obtenidos para  $N = 2$ , teniendo un resultado en la respuesta en frecuencia muy similar para  $N = 3$ . Aquí podemos observar que el decrecimiento de los lóbulos laterales es decreciente conforme nos alejamos de la frecuencia de corte con una amplitud máxima en los lóbulos laterales de -36 dB.

En figura 8 se presenta la respuesta en magnitud para diferentes valores de la función de ventana  $g_k(x)$  donde se observa que los resultados son muy similares para los diferentes valores de  $a$ ,

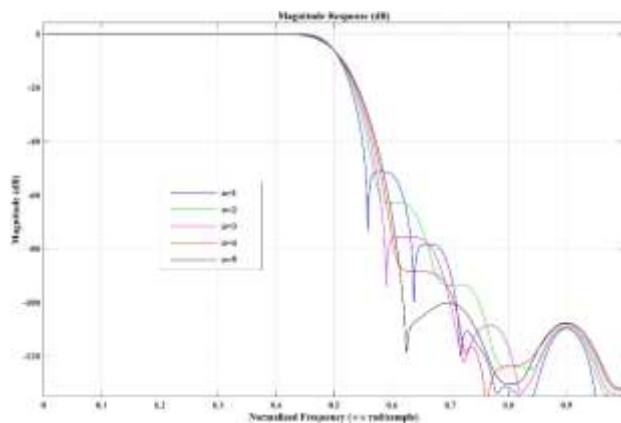


sobresaliendo por muy poco para  $k = 2$ ; teniendo esta familia una amplitud máxima de los lóbulos laterales de -22 dB.

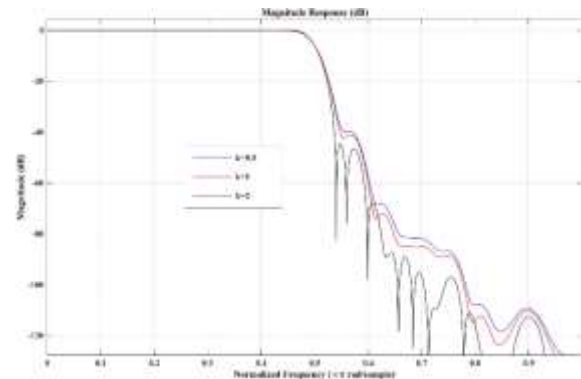
Después de realizar este estudio se realiza una comparación con la ventana clásica de Hamming,  $Fup_3$  y  $g_2(x)$ , con el fin de mostrar la respuesta en magnitud y en fase de dichas ventanas.



**Figura 7.** Respuesta de Función Ventana  $Fup_N$ , para diferentes valores de  $N$ .



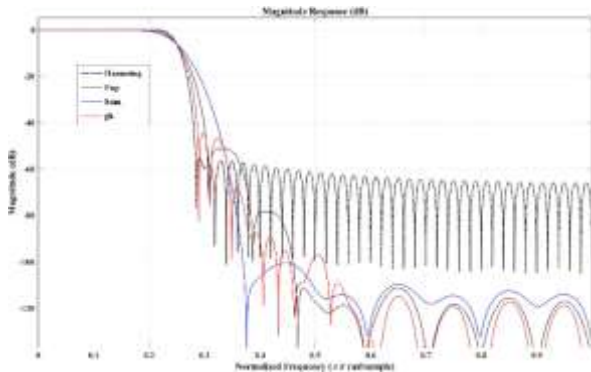
**Figura 8.** Respuesta de Función Ventana  $X_n(x)$ , para diferentes valores de  $n$



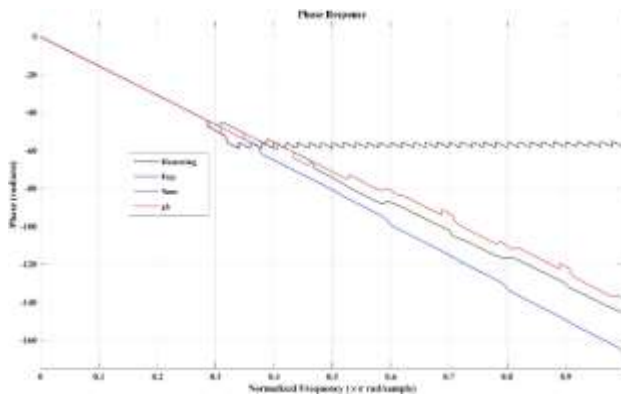
**Figura 9.** Respuesta de Función Ventana  $g_k(x)$ , para diferentes valores de  $k$

En Figura 9 muestra la respuesta en magnitud para una frecuencia de corte normalizada de 0.25, se observa que estas novedosas funciones de ventana presentan una mayor atenuación decreciente con forme se aleja de la frecuencia de corte con respecto a la ventana de Hamming.

Después de una frecuencia normalizada de 0.4 la función ventana para  $k = 2$ , muestra una mayor atenuación de la señal y esta decrece conforme nos alejamos de la frecuencia de corte, mientras que la ventana de Hamming presenta una atenuación de unos 60 dB. La respuesta en fase es mostrada en figura 10 y 11, en la cual se muestra que todas las ventanas presentan una respuesta en fase de manera lineal en la banda de paso y en la banda de rechazo presenta la ventana de Hamming un restado constante esto debido a que los lóbulos laterales de dicha ventana tienen un decrecimiento mínimo después del primer lóbulo lateral; mientras que las novedosas funciones de ventana basadas en la Teoría de AF. Presentan un decrecimiento muy pronunciado con forme se alejan de la frecuencia de corte.



**Figura 10.** Respuesta en frecuencia de Funciones ventana clásicas y Ventanas basadas en la Teoría de AF.



**Figura 11.** Respuesta en fase de Funciones ventana clásicas y Ventanas basadas en la Teoría de AF

## CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran que estas novedosas funciones de ventana presentan una mayor atenuación en la banda de rechazo, lo cual es una ventaja, mientras que en la banda de transición presentan una mayor amplitud en lóbulos laterales; la respuesta en fase es lineal después de la frecuencia de corte esto debido a la atenuación decreciente conforme se aleja de la frecuencia de corte. La venta que presenta mejor respuesta en frecuencia es  $Fup_2(x)$ , la cual muestra una mayor atenuación con respecto a la ventana Hamming, pero tiene una menor ganancia de 0.5 comparado con los 0.539 de la ventana Hamming.

## REFERENCIAS

- [1] V. Oppenheim, A. S. Willsky, (1998), *Señales y Sistemas*, Prentice Hall, 2da Ed. Cap. 4
- [2] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, (2008), *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall. Cap 6
- [3] John G. Proakis, Dimitris K Manolakis, (2006) *Digital Signal Processing* Prentice Hall, (4th Edition), ISBN-13: 978-0131873742, 2006.
- [4] Fredric J. Harris, (1978) "On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 66, No. 1, pp. 51-83.
- [5] Albert H. Nuttall, (1981), *Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior*, *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, vol. Assp-29, no. 1.
- [6] V. F. Kravchenko, M. A. Basarab, V. I. Pustovoi, H. Perez Meana, (2001) *New Constructions of Weight Windows Based on Atomic Functions in Problems of Speech-Signal Processing*, *Doklady Physics*, Vol. 46, No. 3, pp. 166-172.
- [7] V. F. Kravchenko, (2002), *Nuevas ventanas sintetizadas, física de Doklady*, instituto americano de la física, V. 47, No. 1, pp 51-60.
- [8] E. Escamilla-Hernandez, V.F. Kravchenko, V. I. Ponomaryov, D.V. Smirnov, (2006), *Radar Processing on Function Kravchenko-Rvachev for resolving of numerical targets*. *Journal "Telecommunications and Radio Engineering"*, Begell House Inc., ISSN 0040-2508
- [9] Kravchenko, V. F., Hector, M. P., Ponomaryov, V. I., (2009) *Adaptive digital processing of multidimensional signals with applications*, ISBN 978-5-9221-1170-6.
- [10] Enrique Escamilla Hernández, (2012), *Procesamiento de señales en tiempo real en FPGA para radares con compresión del pulso*, EAE Publishing, ISBN 978-3-659-00643-2
- [11] Kravchenko V. F. , Kotelnikov V. A., Churikov D.V., (2010), *Correlation radar signal processing on basis of probability Kravchenko weight functions*, , ICSP 2010, pp. 1906-1909
- [12] V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoi, D.V. Churikov, (2011), *Atomic functions and nonparametric estimates of the probability density*, *Doklady Physics*, Vol. 56, No. 9, pp. 471-475. ISSN 1562-6903.
- [13] Victor F. Kravchenko, Dmitry V. Churikov, (2010), *Radial Atomic Functions in Digital Signal Processing*, *Days on Diffraction*, 2010, pp 99-101, St. Petersburg, Russia.
- [14] M. Cejudo-Torres, E. Escamilla-Hernández, M. Nakano-Miyatake, H. Pérez-Meana, (2012), *Improved Optical Flow Estimation Methods using Atomic Functions*, *Aidaho, USA*,. pp. 996-999
- [15] K. Perez-Daniel, E. Escamilla-Hernandez, M. Nakano-Miyatake, H. Perez- Meana, (2012), *A Novel Image Interest Points Detector Based On Harris Method Using Atomic Functions*, *Journal "Telecommunications and Radio Engineering"*, Begell House Inc., ISSN 0040-2508